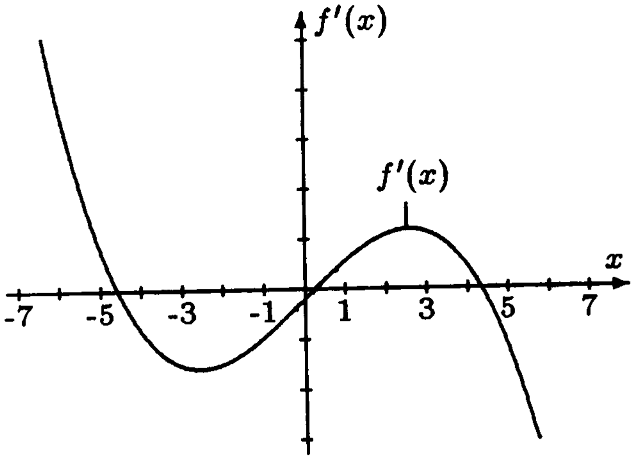
FHDW b.i.b.
FACHHOCHSCHULE DER WIRTSCHAFT
STAATLICH ANERKANNT

Dipl.-Math. J. M. Antweiler

Lösung zur Differentialrechnung

4.



10.2 Die erste Ableitung elementarer Funktionen und Differentiationsregeln

1. **a)** $y' = 18x^{17}$; **b)** $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; **c)** $y' = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$;

d) $y' = -\dfrac{5}{x^6}$; **e)** $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$; **f)** $y' = -\dfrac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}}$.

2. a) $y' = 4x + 4$; b) $y' = 3x^2 + e^x$; c) $y' = \frac{1}{x} + 4x^3$;
d) $y' = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$; e) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; f) $y' = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.

3. a) $y' = 4x\ln x + 2x$; b) $y' = \frac{6x^2 - 2x^3 - x + 1}{e^x}$;
c) $y' = \frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$; d) $y' = 20x + 1$;
e) $y' = xe^{-x}(2 - x)$; f) $y' = \frac{19}{3}x^5\sqrt[3]{x}$.

4. a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; b) $y' = 3(x+5)^2$;
c) $y' = \frac{3x^2 - 8x}{x^3 - 4x^2}$; d) $y' = 3x^2e^{x^3}\ln x + \frac{e^{x^3}}{x}$;
e) $y' = (2\ln x + 2)x^{2x}$; f) $y' = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$;
g) $y' = (2x\ln x + x)x^{x^2}$; h) $y' = \frac{3}{5x}$.

5. a) $y' = \ln x^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} - 2 = \ln x^2$;
b) $y' = -2e^{-2x}\sqrt{x^2+2} + e^{-2x}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$; c) $y' = \frac{2}{x+3}$.

6. $U = 100x - 2x^2$, $U' = 100 - 4x$.

7. a) $K' = \frac{18}{1+3x}$; b) $K'(6) = \frac{18}{19}$.

10.3 Höhere Ableitungen

1. $y' = 20x^3 + \frac{1}{x} + e^x$; $y'' = 60x^2 - \frac{1}{x^2} + e^x$; $y''' = 120x + \frac{2}{x^3} + e^x$.

2. $y' = 2e^x - 2x$; $y'' = 2e^x - 2$.

3. $y' = \ln a \cdot 2x \cdot a^{x^2}$; $y'' = \ln a \cdot 2a^{x^2} + \ln a \cdot 2x \cdot \ln a \cdot 2x \cdot a^{x^2}$.

11 Anwendung der Differentialrechnung zur Untersuchung von Funktionen

1. Untersuche auf Extremwerte:
$y' = 2x^2 - 8x + 6 \overset{!}{=} 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$
$y'' = 4x - 8$
$f''(3) = 12 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x_1 = 3$
$f''(1) = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x_2 = 1$
$y'' = 4x - 8 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_3 = 2$
$y''' = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_3 = 2$
konkaver Bereich: Bedingung für Konkavität: $f'' < 0$
$y'' = 4x - 8 < 0 \Rightarrow 4x < 8 \Rightarrow x < 2$
Die Funktion ist konkav von unten für $x < 2$
konvexer Bereich: Bedingung für Konvexität: $f'' > 0$
$y'' = 4x - 8 > 0 \Rightarrow 4x > 8 \Rightarrow x > 2$
Die Funktion ist konvex von unten für $x > 2$.

2. a) Nullstellen bei $x_1 = 0$; $x_2 = 4{,}854$; $x_3 = -1{,}854$;

b) $y' = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow x_4 = 3$; $x_5 = -1$

$y'' = x - 1$

$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x_4 = 3$

$f''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x_5 = -1$;

c) $y'' = x - 1 = 0 \Rightarrow x_6 = 1$

$y''' = 1$; $f'''(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_6 = 1$.

3. a) $x^2 = z$ $\quad z^2 - 8z - 9 = 0 \Rightarrow z_1 = 9$, $z_2 = -1$

$x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = +3$, $x_2 = -3$;

b) $y' = 4x^3 - 16x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_3 = 0$, $x_4 = +2$, $x_5 = -2$

$y'' = 12x^2 - 16$; $f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x_3 = 0$

$f''(2) = f''(-2) = 32 > 0 \Rightarrow$ Minima bei $x_4 = 2$ und $x_5 = -2$;

c) $y'' = 12x^2 - 16 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_6 = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $x_7 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$

$y''' = 24x$; $f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \neq 0$ und $f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \neq 0$, also Wendepunkte bei x_6 und x_7 ;

d) $y' = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend für $-2 < x < 0$ und $2 < x$.

4. $y = x^6 - 6x^4$

$y' = 6x^5 - 24x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = +2$

$y'' = 30x^4 - 72x^2$; $f''(0) = 0$

$f''(-2) = f''(+2) = 30 \cdot 16 - 72 \cdot 4 = 480 - 288 = 192 > 0$.

Also: Minima bei $x_2 = -2$ und bei $x_3 = +2$

$y''' = 120x^3 - 144x$; $f'''(0) = 0$

$y'''' = 360x^2 - 144$; $f''''(0) = -144 < 0$.

Also: Maximum bei $x_1 = 0$

$y'' = 30x^4 - 72x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_4 = -\sqrt{\frac{12}{5}}$; $x_5 = \sqrt{\frac{12}{5}}$

$y''' = 120x^3 - 144x = 24x\left(5x^2 - 6\right)$

$f'''\left(-\sqrt{\frac{12}{5}}\right) = -24\sqrt{\frac{12}{5}}(12 - 6) = -144\sqrt{\frac{12}{5}} \neq 0$

$f'''\left(\sqrt{\frac{12}{5}}\right) = 24\sqrt{\frac{12}{5}}(12 - 6) = 144\sqrt{\frac{12}{5}} \neq 0$.

Also: Wendepunkte bei $x_4 = -\sqrt{\frac{12}{5}}$ und $x_5 = \sqrt{\frac{12}{5}}$.

5. a) x_0: Sattelpunkt ;
   b) x_1: Extremwert ;
   c) x_2: Keine besondere Aussage ;
   d) $f'''(x_0) = 0$.

6. Bei x_0 liegt kein Extremwert. Bei x_0 liegt ein Wendepunkt.

7. a) $E(x) = px = 54x$;
   b) $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x - 20$

   $G'(x) = -3x^2 + 30x - 27 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 1\ ,\ x_2 = 9$;
   $G''(x) = -6x + 30$; $G''(1) = 24 > 0\ ,\ G''(9) = -24 < 0$
   Maximum bei $x_2 = 9\ ,\ G(9) = 223$;

   c) $K'(x) = 3x^2 - 30x + 81 \Rightarrow$ Min

   $K''(x) = 6x - 30 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_3 = 5$
   $K'''(5) > 0 \Rightarrow$ Minimum der Grenzkosten bei $x = 5$
   $K'(5) = 6$

   $k(x) = x^2 - 15x + 81 + \dfrac{20}{x}$; $k(5) = 35$.

8. a) Eine Funktion ist streng monoton steigend, wenn gilt:
   $f'(x) > 0$ für alle x
   $f'(x) = 3x^2 + 1$
   (1) $3x^2 \geq 0$ für alle x ; (2) $1 > 0$
   Aus (1) und (2) folgt: $f'(x) > 0$ für alle x. Die Funktion ist also streng monoton steigend.

   b) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
   Die Funktion ist also streng monoton steigend.

9. $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}\ ,\ y'' = \dfrac{2}{x^3} > 0$ für $x > 0$ und $y'' < 0$ für $x < 0$. Die Funktion ist also konvex für $x > 0$ und konkav für $x < 0$.

10. $y' = -2e^{-2x} + 2 = 0 \Rightarrow e^{-2x} = 1 \Rightarrow x = 0$
    $y'' = 4e^{-2x}$; $f''(0) = 4e^{-2\cdot 0} = 4 > 0 \Rightarrow$ Min bei $x = 0$
    $y'' = 4e^{-2x} \neq 0$ für alle $x \Rightarrow$ kein Wendepunkt
    $y' = -2e^{-2x} + 2 \lesseqgtr 0 \Rightarrow e^{-2x} \gtreqless 1$
    $\Rightarrow y' < 0$ für $x > 0$ und $y' > 0$ für $x < 0$
    Die Funktion ist also fallend für $x < 0$ und steigend für $x > 0$.

11. a) $y' = e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$y'' = e^x$; $f''(0) = e^0 = 1 \Rightarrow$ Minimum bei $x = 0$

b) $y' = e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$

$< 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < 0$

streng monoton steigend für $x > 0$

streng monoton steigend für $x < 0$.

12. $E(x) = px = 6x - \dfrac{x^2}{2}$;

$G(x) = E(x) - K(x) = 6x - \dfrac{x^2}{2} - 2x^2 + 14x - 25 = -\frac{5}{2}x^2 + 20x - 25$

a) $E' = 6 - x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 6$

$E'' = -1$ Maximum bei $x = 6$;

b) $G' = 20 - 5x = 0 \Rightarrow x = 4$

$G'' = -5$ Maximum bei $x = 4$;

c) C : $(4, 4)$;

d) $K' = 4x - 14 < 0 \Rightarrow x < 3{,}5$ $D(K) = \{x \mid 3{,}5 \leq x\}$.

13. $y' = x^2 + 2ax + b > 0$

$x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$

$x^2 + 2ax + b > 0 \Rightarrow a^2 - b < 0 \Rightarrow a^2 < b$

Bedingungen: (1) $a^2 < b$ und (2) c beliebig.

14. (1) Randextremwerte; (2) nicht differenzierbare Stelle;

(3) Definitionsbereich enthält nur abzählbar viele Werte.

15. a) $k = ax^{b-1} + \dfrac{c}{x}$; b) $K' = abx^{b-1}$;

c) $k = K' \Rightarrow ax^{b-1} + \dfrac{c}{x} = abx^{b-1}$

$$\Rightarrow x^b = \frac{c}{ab - a} \Rightarrow x = \left(\frac{c}{ab - a}\right)^{1/b} .$$

16. a) $y' = \dfrac{1}{10} - \dfrac{250}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 2.500 \Rightarrow x = 50$

$x = -50$ scheidet als Lösung aus

$y'' = +\dfrac{500}{x^3} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x = 50\,\text{km/h}$;

b) $K = 7{,}5 \cdot \dfrac{600}{x} + 40 + 6 \cdot \left(\dfrac{x}{10} - 5 + \dfrac{250}{x}\right)$;

c) $K' = -7{,}5 \cdot \dfrac{600}{x^2} + \dfrac{6}{10} - 6 \cdot \dfrac{250}{x^2} = -\dfrac{6.000}{x^2} + \dfrac{6}{10}$

$K' = 0 \Rightarrow x^2 = 10.000\ ;\ x = 100$

$K'' = \dfrac{12.000}{x^3} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x = 100\,\text{km/h}$.

17. $G(p) = E(p) - K(p) = 2.000p - 10p^2 - (5.000 + 40(2.000 - 10p))$

$= -10p^2 + 2.400p - 85.000$

$\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} = -20p + 2.400 = 0 \Rightarrow p = 120$

$\dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}p^2} = -20 \Rightarrow$ Maximum bei $p = 120$

$G_{\max} = -10 \cdot 120^2 + 2.400 \cdot 120 - 85.000 = 59.000$

18. a) Erlösfunktion: $E(x) = 50x - 4x^2$;

b) Gewinnfunktion: $G(x) = -0{,}2x^3 + 60x - 10$;

c) Produktionsmenge mit maximalem Gewinn:

$G' = -0{,}6x^2 + 60 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x_1 = 10$

$G'' = -1{,}2x\ ,\ G''(10) < 0$

maximaler Gewinn bei $x = 10$ (Mengeneinheiten)

$G_{\max} = 390$ (Geldeinheiten).